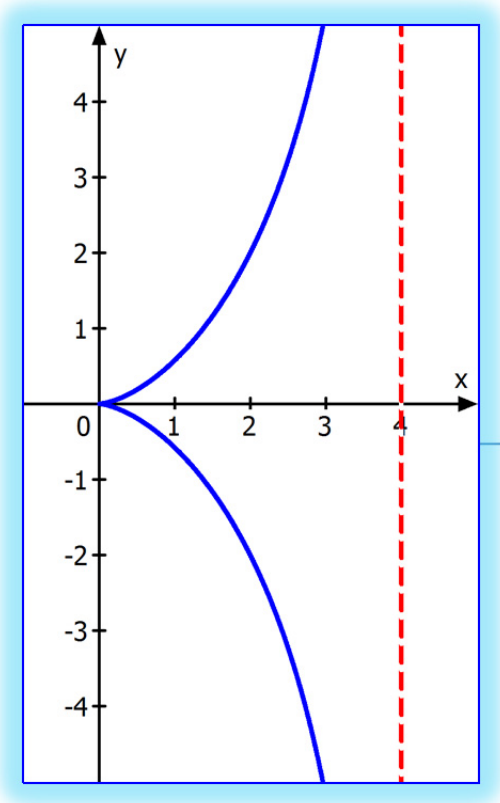


Zissoide

=Kissoide

Text Nr. 54128

Stand 11. Mai 2016

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

1 Vorschau

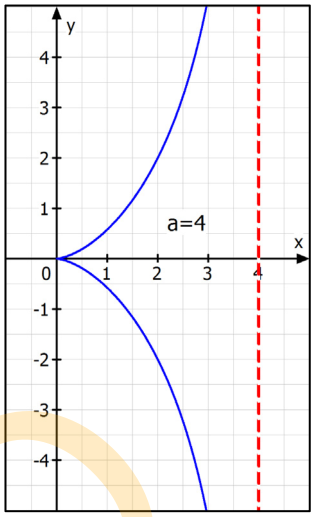
a) Koordinatengleichung:

$x^3 + xy^2 - ay^2 = 0$ oder $x^3 + (x-a) \cdot y^2 = 0$

Für a > 0.

Sie hat die senkrechte Asymptote: y = a.

In manchen Gleichungen wird statt a gerne 2a verwendet.



b) Parametergleichung:

$x(t) = \frac{at^2}{1+t^2}$, $y(t) = \frac{at^3}{1+t^2}$

c) Gleichung mit Polarkoordinaten:

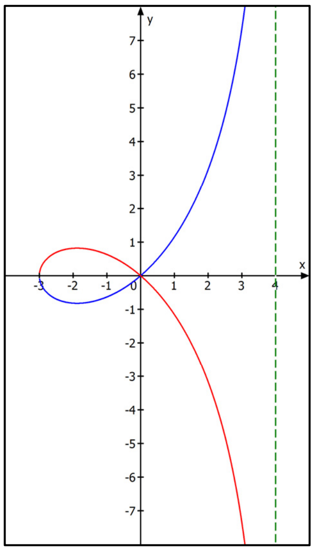
$r(\varphi) = a \cdot \sin(\varphi) \cdot \tan(\varphi)$

Information: Die Fläche zwischen der Kurve und der Asymptoten hat den Inhalt

$A = \frac{3}{4}\pi \cdot a^2$

Es gibt eine zur Kissoide verwandte Kurve: Die **Hypo-Kissoide**

Sie hat die Gleichung: $x^3 + xy^2 + (d-a) \cdot x^2 - ay^2 = 0$



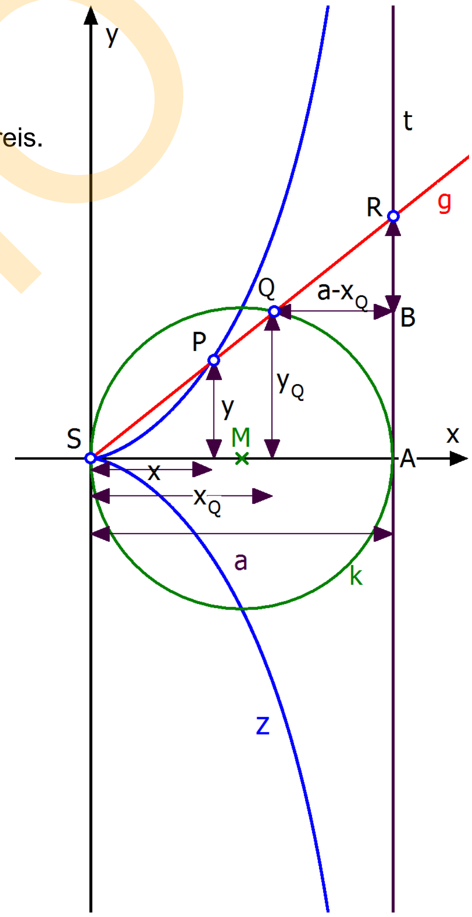
2 Herleitung einer Kurvengleichung

Die Punkte der Zissoide sind gekennzeichnet durch folgende geometrische Eigenschaft:

1. Gegeben sei ein Kreis k mit dem Durchmesser a.
2. S sei ein Punkt auf diesem Kreis (ich wähle dafür den Ursprung).
3. Der Kreisdurchmesser durch S schneidet den Kreis in einem Punkt A.
4. t sei die Tangente in A an den Kreis.
5. Nun wählt man einen beweglichen Punkt Q auf dem Kreis.
6. Die Halbgerade g = (SQ) schneidet die Tangente t in R.
7. Trägt man die Strecke QR auf der Halbgeraden von S aus ab, erhält man einen Punkt P.

Definition: **Die Ortskurve aller dieser Punkte P heißt Zissoide oder Kissoide**

Herleitung einer Kurvengleichung aus dieser Definition:



Es sei $P(x\,|\,y)$ ein Kurvenpunkt der Zissoide, R ist der Punkt auf der Tangente und $Q\,Q(x_Q\,|\,y_Q)$ der Schnittpunkt von g mit dem Kreis. Auf Grund der Definition sind die Strecken SP und QR gleich lang, sie sind also die Hypotenusen zweier kongruenter Dreiecke.

Daher ist $x = a - x_Q$ bzw. $x_Q = a - x$

Nach dem 2. Strahlensatz gilt:

$$\frac{y_Q}{y} = \frac{x_Q}{x} \quad \Rightarrow \quad y_Q = \frac{a-x}{x}\cdot y$$

Nun liegt ja Q auf dem Kreis. Dieser hat den Mittelpunkt $M\left(\frac{a}{2}\,|\,0\right)$

und den Radius $r = \frac{a}{2}$. Seine Gleichung lautet somit:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

bzw. $\quad x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 = \frac{a^2}{4}$

oder: $\quad x^2 - ax + y^2 = 0$

Hier setzen wir die oben berechneten Koordinaten von Q ein:

$$(a-x)^2 - a\cdot(a-x) + \left(\frac{a-x}{x}\right)^2\cdot y^2 = 0$$

Man darf durch $(a-x)$ dividieren, denn bei x = a liegt offensichtlich kein Punkt der Zissoide, also ist $x \neq a$ also $(a-x) \neq 0$:

$$(a-x) - a + \frac{(a-x)}{x^2}\cdot y^2 = 0$$

$$-x + \frac{(a-x)}{x^2}\cdot y^2 = 0 \qquad |\cdot x^2$$

$$-x^3 + (a-x)\cdot y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^3 + ay^2 - xy^2 = 0$$

Ergebnis: $\quad x^3 + xy^2 - ay^2 = 0 \quad$ oder $\quad x^3 + (x-a)\cdot y^2 = 0$

3 Kurvengleichung der Hypokissoide

Es gibt eine zur Kissoide verwandte Kurve: Die **Hypo-Kissoide**

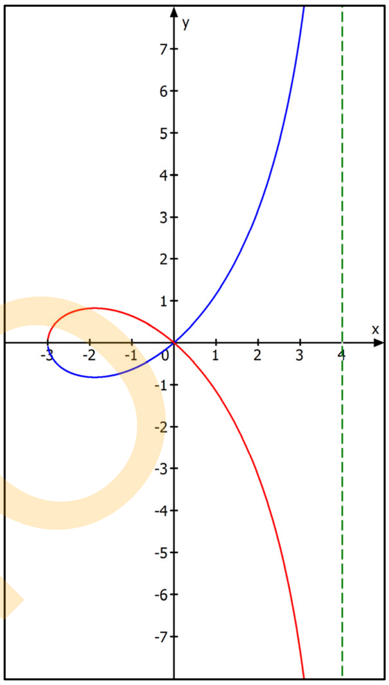
Sie hat die Gleichung: $x^3 + xy^2 + (d-a)\cdot x^2 - ay^2 = 0$

Man kann diese Gleichung nach y^2 umstellen und so zwei Ersatzfunktionen bilden:

$$xy^2 - ay^2 = -x^3 - (d-a)\cdot x^2$$
$$(x-a)y^2 = -(x+(d-a))x^2$$
$$y^2 = \frac{-(x+(d-a))x^2}{x-a}$$

bzw. $$y^2 = \frac{(x+(d-a))x^2}{a-x}$$

Ersatzfunktionen: $$y_{1,2} = \pm x\sqrt{\frac{(x+(d-a))}{a-x}}$$



Der blaue Kurventeil gehört zu +.

Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse:

Bed.: y = 0: $x + (d-a) = 0 \Leftrightarrow x = -(d-a) = a-d$

Abbildung für d = 7 und a = 4, also ist $d-a=3$ und

X+ $x^3 + xy^2 + 3x^2 - 4y^2 = 0$ bzw. $y_{1,2} = \pm x\sqrt{\frac{x+3}{4-x}}$

Ihr Definitionsbereich ist $\mathbf{D} = [-3\,;4\,[$.

Als Student sollte man sie ableiten können: Produktregel und für die Wurzel Kettenregel mit Quotientenregel als innerer Ableitung:

$$y' = \pm\left(1\cdot\sqrt{\frac{x+3}{4-x}} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+3}{4-x}}}\cdot\frac{1\cdot(4-x)+1\cdot(x+3)}{(4-x)^2}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{x+3}{4-x}} + \frac{x\cdot\sqrt{4-x}}{2\sqrt{x+3}}\cdot\frac{7}{(4-x)^2}\right)$$

$$y' = \pm\left(\sqrt{\frac{x+3}{4-x}} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}}\cdot\frac{7}{(4-x)^{3/2}}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{x+3}{4-x}} + \frac{7x}{2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x}\cdot(4-x)}\right)$$

Man kann die beiden Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen. Dazu muss man den ersten

erweitern: $$y' = \pm\left(\frac{2\sqrt{x+3}\sqrt{x+3}\cdot(4-x)}{2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x}\cdot(4-x)} + \frac{7x}{2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x}\cdot(4-x)}\right)$$

$$y' = \pm\left(\frac{2(x+3)\cdot(4-x)+7x}{2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x}\cdot(4-x)}\right) = \pm\left(\frac{-2x^2+9x+24}{2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x}^3}\right)$$

Manche werden diese Funktionen aus ihrem Analysis-Unterricht her kennen.
In den Zeiten des G8 wird sie vermutlich nicht mehr auftauchen, denn dafür gibt es keine Zeit mehr und die Anforderungen sind reduziert worden.

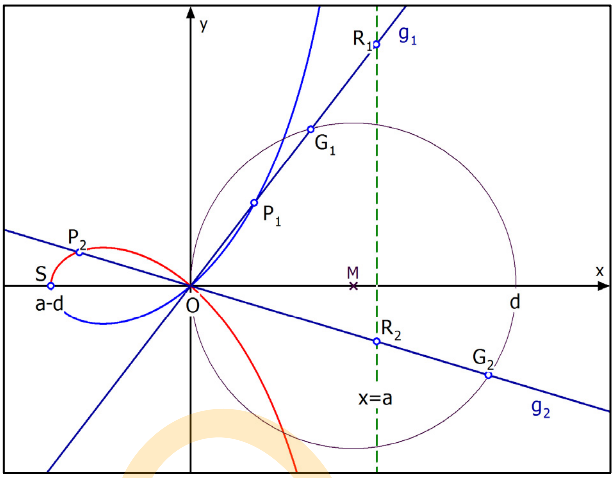
Sie ist mit der Zissoide (Kissoide) durch die definierende **geometrische Eigenschaft** verwandt.

Man sollte jetzt zuerst die geometrische Definition von Seite 4 gelesen haben.

Im Gegensatz dazu hat schneidet jetzt die senkrechte Gerade x = a, (die dann zur Asymptote wird) den Kreis mit dem Durchmesser d (d > a).

Bedingung für einen Kurvenpunkt ist entweder

$\overline{OP_1} = \overline{G_1R_1}$ oder $\overline{OP_2} = \overline{G_2R_2}$ für die Schleife.

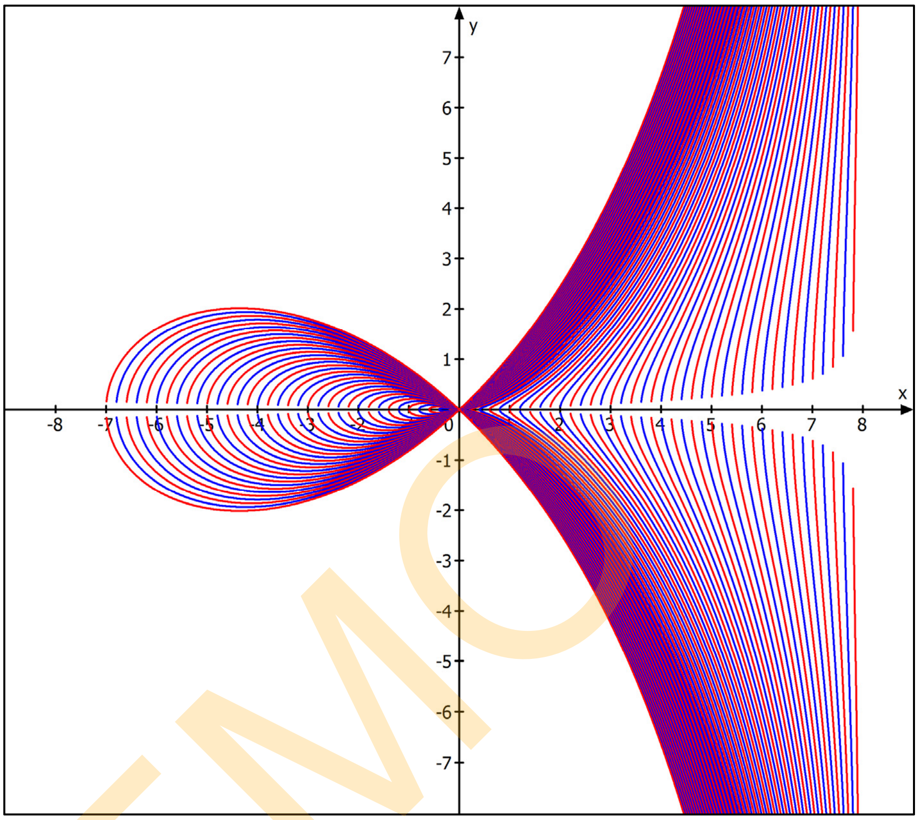


Hier sehen Sie eine Schar von Hypokissoiden mit a = 8 und d als Parameter.

Dargestellt wurden die Ersatzfunktionen, die sich aus Gründen der Auflösung an der x-Achse nicht immer treffen.

Die Gleichung:

$$f_{1,2}(x,d) = \pm x\sqrt{\frac{(x+(d-8))}{8-x}}$$



Für d = 8 liegt die gewöhnliche Kissoide mit der Spitze in O vor.

Ist aber d < a = 8, dann erreicht die Kurve den Ursprung nicht mehr.

Beispiel: $f_{1,2}(x,d) = \pm x\sqrt{\frac{x-5}{8-x}}$ mit d = 3 und a = 8.